

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 1

В-1 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}.$$

Ответ: $x \in [1.5, 2]$

Решение. После преобразований при условии $x \leq 2$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} - x + 2 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$|2x-3| + |x-3| = x.$$

То есть, с учётом ОДЗ, получаем, что $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.

В-2 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \left(\sqrt{(x+2)}\right)^2 = \sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}.$$

Ответ: $x \in [-2, -1.5]$

В-3 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - \left(\sqrt{(x-1)}\right)^2 = \sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}.$$

Ответ: $x \in [1, 1.5]$

В-4 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{9x^2 + 12x + 4} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = \sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}.$$

Ответ: $x \in [-1.5, -1]$

Задача 2

В-1 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

Ответ: 33

Решение. Функция

$$f(x) = 2^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x$$

при $x > 0$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) < 2^5 + 1 = 33.$$

Значит, при $x > 0$ функция не принимает значений $a \geq 33$, а для любого $a < 33$ при некоторых достаточно больших $x > 0$ принимает значение, не меньшее a , так как при $0 < x \rightarrow +\infty$ имеем:

- 1) $2^{5-\frac{1}{x}}$ — строго возрастающая к 2^{5-0} функция;
- 2) 2^x — неограниченно возрастающая функция, а значит, при сколь угодно больших x регулярно выполняется равенство $\sin 2^x = -1$.

В-2 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

Ответ: 244

В-3 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

Ответ: 126

В-4 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

Ответ: 1025

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 3

В-1 В окружность радиуса 3 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 3, 3, $3\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Решение. Решим задачу в общем случае. Обозначим четырёхугольник $ABCD$. Пусть $AB = BC = R$; $CD = R\sqrt{2}$. В такой конфигурации угол между сторонами AB и BC равен 120° . Угол $\angle ADC = 60^\circ$, как противолежащий. Диагональ $AC = R\sqrt{3}$. Из теоремы синусов для треугольника ACD следует, что угол $\angle CAD$ равен 45° (угол $\angle CAD$ острый, т.к. иначе $\angle CAD = 135^\circ$, и сумма углов треугольника ADC будет больше $60^\circ + 135^\circ > 180^\circ$). Значит, угол ACD равен 75° . Площадь S четырёхугольника можно вычислить, как сумму площадей треугольников ABC и ADC . $S_{ABC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ADC} = \frac{R^2\sqrt{6}}{2} \cdot \cos 15^\circ = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow$

$$S = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3}) = \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Возможна другая конфигурация: $AB = CD = R$; $BC = R\sqrt{2}$. В этом случае четырёхугольник — равнобокая трапеция с углом при основании 75° . Тогда высота $CH = R \sin 75^\circ$, и площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)CH = \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Оба варианта одинаковые, в ответ идёт $\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Другой способ решения. Соединим вершины четырёхугольника с центром окружности. Получается, что четырёхугольник составлен из двух правильных треугольников со стороной 3 (площадь каждого из которых равна $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ одного прямоугольного треугольника с катетами 3, 3 и гипотенузой $3\sqrt{2}$ (площадь равна $\frac{9}{2}$) и одного равнобедренного треугольника со сторонами 3 и 3 и углом между ними $360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ (площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 150^\circ = \frac{9}{4}$). Суммарная площадь равна $\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, вне зависимости от того, в каком порядке они расположены.

В-2 В окружность радиуса 4 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 4, 4, $4\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$

В-3 В окружность радиуса 5 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 5, 5, $5\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ: $\frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

В-4 В окружность радиуса 6 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 6, 6, $6\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ: $27 + 18\sqrt{3}$

Задача 4

В-1 Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.6]$.

Ответ: $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$

Решение. (Для варианта 1) Так как

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc = 3(a + b)(b + c)(a + c),$$

то либо $\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) = 0$, либо $\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) = 0$, либо $\cos(\pi x) - \cos(4\pi x) = 0$.

В первом случае $\cos(2\pi x) = \cos(\pi - \pi x) \Leftrightarrow 2\pi x = \pi - \pi x + 2\pi k$ или $2\pi x = \pi x - \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}$, $x = -1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Во втором случае $\cos(2\pi x) = \cos(4\pi x) \Leftrightarrow 4\pi x = 2\pi x + 2\pi k$ или $4\pi x = -2\pi x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $x = k$, $x = \frac{k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В третьем случае $\cos(\pi x) = \cos(4\pi x) \Leftrightarrow 4\pi x = \pi x + 2\pi k$ или $4\pi x = -\pi x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $x = \frac{2n}{3}$, $x = \frac{2n}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В указанный промежуток попадают корни

$$1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5},$$

в сумме которые дают $7\frac{1}{3}$

В-2 Найдите все решения уравнения

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.8]$.

Ответ: $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$

В-3 Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.8]$.

Ответ: $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}$

В-4 Найдите все решения уравнения

$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.6]$.

Ответ: $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$

Задача 5

В-1 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 8),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 12)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ: 27

Решение. Так как $f_1 \equiv f_2 \equiv f_3$, то уравнение $f_1(x) = 0$ имеет отрицательные корни $x_1 = -a_1, x_2 = -a_2, x_3 = -a_3$, и это три разных корня, так как если бы линейные множители в двух тождественно равных функциях были бы одинаковыми, то совпадали бы и квадратичные множители, а по условию задачи это не так.

Поэтому из теоремы Виета следует:

$$x_2 \cdot x_3 = 6, x_1 \cdot x_3 = 8, x_1 \cdot x_2 = 12.$$

Отсюда $(x_1 x_2 x_3)^2 = (6 \cdot 4)^2$, и $x_1 x_2 x_3 = -24$. Поэтому $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2$. Далее, $a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = 2$. Соответственно, $b_1 = 3 + 2 = 5, b_2 = 4 + 2 = 6$ и $b_3 = 4 + 3 = 7$. Поэтому $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 4 + 5 + 3 + 6 + 2 + 7 = 27$.

Заметим, что можно было просто раскрыть скобки в каждой из трех функций и приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x . Однако возникающая после этого система шести уравнений решается достаточно трудоемко.

В-2 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 14),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 21)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ: 36

В-3 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 12),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 18),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 24)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ: 39

В-4 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 12),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 15),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 20)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ: 36

Задача 6

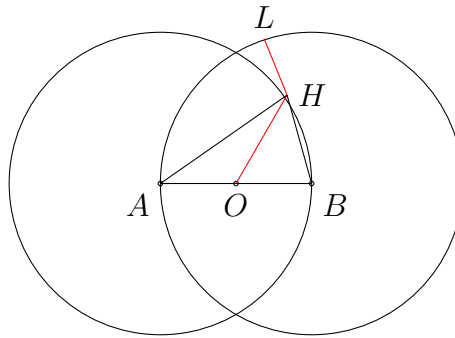
В-1 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $4 - 2\sqrt{2}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ: $4 - 2\sqrt{2}$

Решение.



Пусть радиус полива равен R . В точках A и B расположены поливалки, нора находится в O . Поменяем направление — пусть мышь выбегает из норы и стремится на сухую землю. Путь мыши может быть какой угодно формы, но, так или иначе, ей придётся покинуть область двойного полива — пусть это произойдёт в точке H . Тогда — оптимальный путь до точки H это отрезок OH , а оптимальный путь от H до сухой земли — это HL , где H лежит на радиусе BL . Значит, кандидаты на оптимальный путь — ломаные вида OHL (красный путь на чертеже) и определяются они одним параметром — положением точки H .

Мышь мокнет от каждой поливалки, поэтому нужно минимизировать сумму расстояний, пройденных под каждой поливалкой. Путь под поливалкой A равен $|OH|$, путь под поливалкой B равен $|OH| + |HL|$, поэтому нужно найти минимально возможное значение $|OH| + (|OH| + |HL|) = 2|OH| + |HL|$.

Опишем положение H через угол $\angle HAB = \alpha$, где $\alpha \in [0, 60^\circ]$. Тогда: $|AH| = R$, $|OA| = \frac{R}{2}$, $|OH|$ находим по теореме косинусов:

$$|OH| = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2 \cos \alpha}.$$

Далее, $|HL| = R - |BH|$, а $|BH|$ найдём как основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами R и известным углом между ними:

$$|HL| = R - 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Значит:

$$2|OH| + |HL| = f(\alpha) = R \left(2\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha} + 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad \text{где } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right].$$

Нужно найти минимум функции $f(\alpha)$, которая характеризует степень намокания — берём производную:

$$f'(\alpha) = R \left(-\cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha}} \right) = \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha}} \left(-\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Нулю может равняться только скобка (угол α меняется в таких пределах, что $\cos \frac{\alpha}{2}$ в ноль не обращается). Решаем уравнение

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha},$$

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4} - \cos \alpha$$

$$2 - 2 \cos \alpha = \frac{5}{4} - \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Значит, экстремум f равен (если $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$)

$$f(\alpha) = R \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

На всякий случай проверим, точно ли это точка минимума. Если бы мышь взяла курс ровно наверх (см. рисунок), то $f(\alpha)$ приняла бы значение $2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$, что больше, чем $R \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (правда, разница небольшая). Если бы побежала направо — $f(\alpha)$ равнялось бы $2R$. Так что мы действительно нашли минимум.

Длина пути при этом равна $|OH| + |HL|$, то есть ответ равен

$$|OH| + |HL| = R \left(\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha} + 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) = R \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{2}{2\sqrt{2}} \right) = R.$$

В-2 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ: $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

В-3 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ: $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$

В-4 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ: $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$

Задача 7

В-1 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 2048 и.е., сторона верхней площадки равна 486 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 45° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 45° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

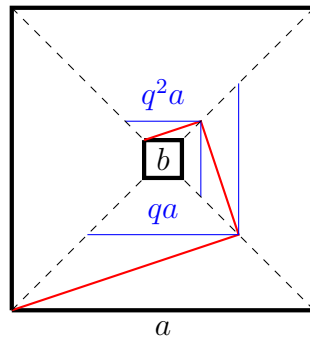
Ответ: $3905\sqrt{2}$

Решение. Пусть сторона нижнего основания пирамиды равна a , сторона верхнего равна b , угол спуска равен α , а число пройденных граней равно n .

Будем считать, что он на самом деле поднимался. Обозначим (пока нам неизвестные) величины — высоту постройки через H , угол наклона боковой стороны пирамиды к земле через β . Понятно, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2H}{a-b}, \quad H = \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Давайте взглянем на пирамиду в проекции сверху:



Заметим, что рисунки на гранях подобны друг другу — переход по следующей грани будет равен некоторому q умножить на длину перехода по предыдущей. Мы можем заметить трапеции — с основаниями a и qa , qa и q^2a , q^2a и q^3a , и так далее. У последней трапеции вершина равна b . Следовательно,

$$b = q^n a, \quad q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Далее, введём величину h , на которую он поднялся, преодолев первый отрезок пути (самый длинный.) Тогда из подобия рисунка следует, что за второй переход он добавит к высоте qh , за третий — q^2h , и так далее. Следовательно,

$$H = h + qh + qh^2 + \dots + q^{n-1}h = h \frac{1-q^n}{1-q} = h \frac{1-\frac{b}{a}}{1-q} = \frac{h(a-b)}{a(1-q)}.$$

Все величины известны, кроме h .

Обозначим на пирамиде некоторые точки. Ребро основания, с которого начат подъём — это AB , путь начат из A . Первый отрезок пути соединяет A и точку P на боковом ребре. Из точки

P проведём в плоскости ABP прямую, параллельно AB , и она пересечёт другое боковое ребро в P_1 . Получится трапеция $ABPP_1$ с основаниями $AB = a$, $PP_1 = qa$. Точку P ортогонально проецируем на нижнее основание, в точку R — и длина PR будет как раз h . От точки R в плоскости основания проведём перпендикуляр к стороне AB , и он пересечёт AB в точке L .

Тогда: угол RBA равен 45° , так как R падает на диагональ квадрата. $RL = LB$, а $LR = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}$. Сторона $AR = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$. Сторона $AL = a - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}$. Треугольник ALR прямоугольный, и поэтому

$$\left(\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2 + \left(a - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2$$

Выражение даст нам квадратное уравнение относительно h , которое, однако, удобнее оформить как уравнение относительно $\frac{1}{h}$.

$$a^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 - \frac{2a}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1}{h} + \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) = 0.$$

Положительное решение такого уравнения будет равно

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a \operatorname{tg} \beta} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}\right).$$

С другой стороны, по свойствам трапеции

$$LB = \frac{1}{2}(AB - PP_1), \quad \text{то есть } a(1 - q) = 2 \operatorname{ctg} \beta h, \quad h = \frac{a(1 - q)}{2} \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{1}{h} = \frac{2}{a(1 - q) \operatorname{tg} \beta}.$$

Приравниваем разные выражения для $\frac{1}{h}$. Это приведёт к уравнению

$$\frac{2}{1 - q} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Уравнение можно решить относительно неизвестного $\operatorname{tg} \beta$, получится

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2(1 + q^2)}{(1 - q)^2}}.$$

Подставим $\operatorname{tg} \beta$ в выражение для высоты, и в итоге получим

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \sqrt{\frac{1 + q^2}{(1 - q)^2}} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{где } q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

В-2 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 256 и.е., сторона верхней площадки равна 8 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 45° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 45° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ: $124\sqrt{10}$

В-3 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 6144 и.е., сторона верхней площадки равна 1458 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 30° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 30° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ: $3905\sqrt{6}$

В-4 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 384 и.е., сторона верхней площадки равна 3 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 60° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 60° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 7 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 7 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ: $381\sqrt{\frac{15}{2}}$

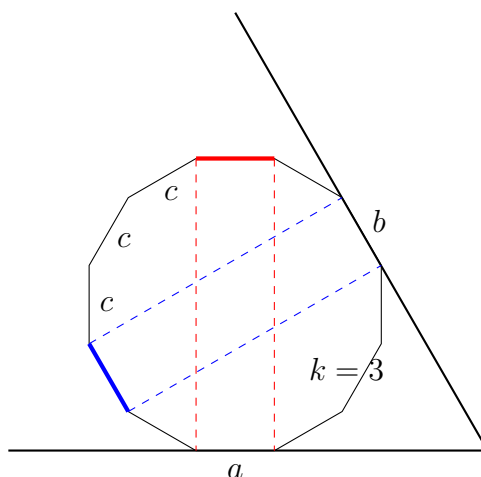
Задача 8

В-1 Через три стороны правильного 30-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ: 19

Решение. Пусть n — число сторон многоугольника. Пусть n чётное.



- Всего способов выбрать тройку сторон (a, b, c) из имеющихся n будет $n(n-1)(n-2)$. Правда, не каждая тройка порождает треугольник, и разные тройки могут порождать одинаковые по форме фигуры. Для правильного подсчёта нам понадобится различать равносторонние, равнобедренные и остальные треугольники, так как у них разное количество симметрий.
- Давайте считать, что (a, b, c) расположены против часовой стрелки. Первую сторону треугольника a можно выбрать n способами. Пометим параллельную a сторону красным. Для выбора второй стороны b отсчитываем k сторон от a , где $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2} - 1$. Помечаем параллельную b сторону синим. Для выбора c остаются только стороны между красной и синей сторонами — и вариантов выбора будет ровно k .

Значит, всего треугольников будет $n \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + (\frac{n-2}{2} - 1)) \cdot \frac{2}{6}$ (умножаем на 2, чтобы учесть тройки, где a, b, c расположены по часовой, и делим на 6 для учёта всех перестановок a, b, c между собой). Используем формулу суммы прогрессии, получаем, что всего треугольников будет

$$S = \frac{n(n-2)(n-4)}{24}.$$

- Сколько будет равнобедренных (но не равносторонних) треугольников? Основание можно выбрать n способами, правую боковую сторону выбираем так, чтобы она пересекалась с основанием под острым углом (но не 60°). Левая боковая сторона будет достроена однозначно. Для выбора боковой стороны есть $\frac{n-4}{4}$ вариантов (если n делится на 4), и $\frac{n-2}{4}$ в ином случае, и ещё нужно отнять одну сторону под углом 60° , которая будет, если n делится на 3. Равнобедренных треугольников будет $(m, q$ — целые)

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{n(n-4)}{4} & \text{если } n = 4m, n \neq 3q, & & S_2 &= \frac{n(n-2)}{4} & \text{если } n \neq 4m, n \neq 3q, \\ S_2 &= \frac{n(n-8)}{4} & \text{если } n = 4m, n = 3q, & & S_2 &= \frac{n(n-6)}{4} & \text{если } n \neq 4m, n = 3q. \end{aligned}$$

- Равносторонний треугольник можно выбрать, если n делится на 3. Таких треугольников будет $\frac{n}{3}$ штук. Если n на 3 не делится, то их не будет.

$$S_3 = \frac{n}{3}, \quad \text{если } n = 3q, \quad S_3 = 0 \quad \text{если } n \neq 3q.$$

Значит, у нас есть $S_1 = S - S_2 - S_3$ неравобедренных, S_2 равобедренных неравносторонних и S_3 равносторонних треугольников.

Теперь учтём повороты и отражения. Равносторонний треугольник на самом деле единственный. Каждый равобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет n равных себе, полученных поворотами. Неравобедренный треугольник можно поворачивать n способами и отражать, что даёт $2n$ равных ему.

Значит, ответ (в общем случае при чётном n) равен

$$\frac{S - S_2 - S_3}{2n} + \frac{S_2}{n} + \frac{3S_3}{n}.$$

Для разных вариантов:

- $n = 30$, $S = 910$, $S_1 = 720$, $S_2 = 180$, $S_3 = 10$, ответ равен $12 + 6 + 1 = 19$.
- $n = 32$, $S = 1120$, $S_1 = 896$, $S_2 = 224$, $S_3 = 0$, ответ равен $14 + 7 + 0 = 21$.
- $n = 36$, $S = 1632$, $S_1 = 1368$, $S_2 = 252$, $S_3 = 12$, ответ равен $19 + 7 + 1 = 27$.
- $n = 40$, $S = 2280$, $S_1 = 1920$, $S_2 = 360$, $S_3 = 0$, ответ равен $24 + 9 + 0 = 33$.

В-2 Через три стороны правильного 32-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ: 21

В-3 Через три стороны правильного 36-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ: 27

В-4 Через три стороны правильного 40-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ: 33